

SOBRE LA CONSTRUCCIÓ DE CÒNIQUES EN EL TRACTAT *DE LA APLICACION DEL ALGEBRA A LA GEOMETRIA* DE CERDÀ¹

JOAQUIM BERENGUER

CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA
UNIVERSITA POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Resum: *En aquest article volem donar a conèixer com Tomàs Cerdà (1715-1791), en el seu tractat De la Aplicacion de la Algebra a la Geometria, inspirant-se, per una banda, en els Elementa Matheseos Universae (1713-1715) de Christian Wolff (1679-1754), i, per altra banda, en A Mathematical Treatise: Containing a System of Conic-Sections with the Doctrine of Fluxions and Fluents applied to various subjects (1736) de John Muller (1699-1784), explica la forma de dibuixar les diferents còniques i quines són les diferents eines utilitzades o construccions geomètriques per dibuixar-les. A l'interès que té, des d'una perspectiva històrica, l'estudi de les eines i construccions emprades al segle XVIII per dibuixar aquestes corbes, cal afegir el que pot tenir, des d'un punt de vista pedagògic actual, la recreació d'aquestes eines a una classe del segle XXI.*

Paraules clau: Cerdà, segle XVIII, ensenyament, còniques.

On the construction of the conic-section in the treatise *De la aplicación del Algebra a la Geometria*, by Cerdà

Summary: *In this article we aim to show how Tomàs Cerdà (1715-1791), in his treatise De la Aplicacion del Algebra a la Geometria, being inspired, on the one hand, by the Elementa Matheseos Universae (1713-1715) by Christian Wolff (1679-1754), and, on the other hand, by A Mathematical Treatise: Containing a System of Conic-Sections with the Doctrine of Fluxions and Fluents applied to various subjects (1736) by John Muller (1699-1784), explains how to draw the different conics and what are the different instruments or geometric constructions used to draw them. To the interest that the study of the instruments and constructions used in the 18th century to draw these curves has, from a historical perspective, must be added the interest that the recreation of these instruments in a 21st century classroom can have, from a current pedagogical point of view.*

1. Projecte PID2020-113702RB-I00: «Matemáticas, Ingeniería y Patrimonio: Nuevos Retos y Prácticas, XVI-XIX» del Ministerio de Ciencia e Innovación. Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica.

Keywords: Cerdà, Eighteenth century, teaching, Conic-Sections.

Introducció

Tomàs Cerdà, matemàtic i jesuïta, va ensenyar matemàtiques al col·legi de Cordelles de Barcelona, del 1756 al 1764. Durant aquest període va publicar un tractat sobre aritmètica i àlgebra i un altre sobre geometria. Del 1765 al 1767 va ensenyar matemàtiques al Colegio Imperial de Madrid (Berenguer, 2016).

Cerdà també va preparar altres tractats per a ser publicats com el *Tratado de Fluxiones* (Berenguer, 2015), els quals s'han conservat en forma de manuscrit a la Real Academia de la Historia de Madrid. Un d'aquests tractats porta per títol *De la Aplicacion de la Algebra a la Geometria*,² que va ser escrit entre 1760 i 1767.

Com ja hem explicat en altres articles (Berenguer, 2023), l'estudi del text sobre àlgebra aplicada a la geometria de Cerdà resulta especialment rellevant en el marc de l'anàlisi de la introducció de l'algebrització de la geometria a l'Espanya del segle XVIII. Una de les parts que més espai ocupa en aquest darrer tractat és la dedicada a les seccions còniques. Cerdà mostra la manera de dibuixar les diferents còniques i quins són les diferents eines utilitzades o construccions geomètriques per dibuixar-les. I això ho fa inspirant-se, en un capítol, en els *Elementa Matheseos Universae* de Christian Wolff i en un altre en *A Mathematical Treatise: Containing a System of Conic-Sections with the Doctrine of Fluxions and Fluents applied to various subjects* de John Muller. Creiem que l'anàlisi d'aquestes construccions pot suggerir a l'ensenyant del segle XXI, en les seves classes de matemàtiques, formes de treballar unes corbes, conegudes pels alumnes, aprofundint en les seves propietats geomètriques.

Sobre la construcció de la paràbola

En el "Cap [6]. De la ecuación y propiedades de la parábola" del tractat *De la Aplicacion del Algebra a la Geometria* de Cerdà, tenim una primera descripció de com es pot construir una paràbola a partir de l'equació que la defineix i a partir de propietats geomètriques que es poden aplicar segons l'equació d'aquesta cònica. Com la resta del capítol, aquest text està extret de «Caput VI De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicat» de la «Pars Prima Elementa Analyseos Finitorum tradit (Sectio Secunda de Algebra)» dels *Elementa Analyseos Mathematicae tam finitorum quam infinitorum* (8367-8583) dins *Elementa Matheseos Universae* de Wolff (vegeu les figs. 1 i 2):

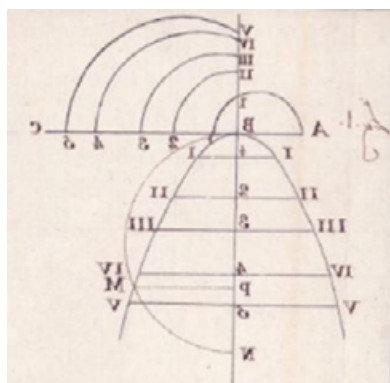


FIGURA 1. Construcció de la paràbola (1).
FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 37, «Lam. 2».

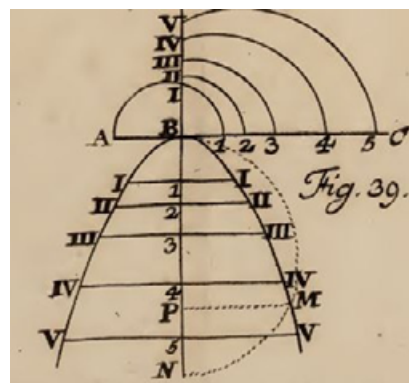


FIGURA 2. Construcció de la paràbola (2).
FONT: Wolff, 1713-1715: «Fig: Alg: Tab: III».

2. En aquest text hem volgut mantenir l'ortografia original dels títols.

El que fa Cerdà és construir els punts de la paràbola (*I, II, III,...*) de manera que compleixin l'equació d'aquesta $y^2 = ax$, on $a = AB$. Les x seran $B1, B2, B3,...$ i les y $1I, 2II, 3III,...$ ³

És a dir, es tracta de dibuixar punts que compleixin l'equació $ax = y^2$, la qual cosa en el semicercle sempre es compleix (vegeu les figs. 3 i 4):

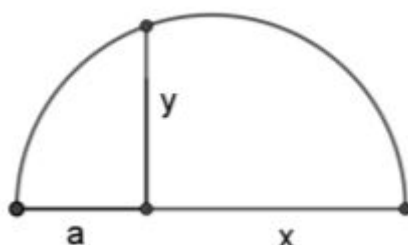


FIGURA 3. Semicercle.

FONT: Figura de l'autor de l'article.

Cerdà dibuixa semicercles amb centre sobre una recta, de manera que tots els cercles passin pel punt A, on $AB = a$ és el paràmetre de la paràbola. Queden així determinats sobre aquests semicercles els segments $BI, BII, BIII,...$ i els segments $B1, B2, B3,...$ pels quals es complirà la propietat $BI^2 = aB1, BII^2 = aB2, BIII^2 = aB3, \dots$,

A continuació, trasllada els segments $B1, B2, B3,...$ sobre l'eix de la paràbola i dibuixa els $1I, 2II, 3III,...$ iguals als $BI, BII, BIII,...$, respectivament. De manera que es complirà $1I^2 = aB1, 2II^2 = aB2, 3III^2 = aB3,...$ És a dir, per tots els punts $I, II, III,...$ es complirà l'equació de la paràbola.

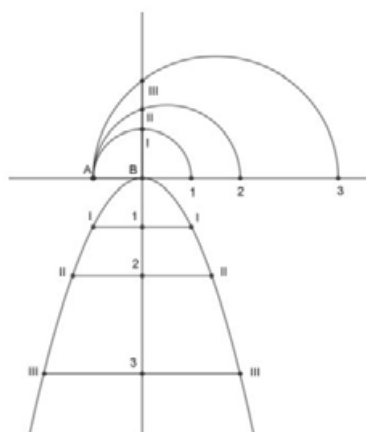


FIGURA 4. Construcció de la paràbola (3).

FONT: Figura de l'autor de l'article.

Per altra banda, en el mateix tractat de Cerdà, en la proposició 2 del capítol «Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas», tornem a trobar la forma de dibuixar una paràbola. En aquest cas, Cerdà segueix la «Section I. Of Conic-Sections consider'd in Plano» de *A Mathematical Treatise*:

3. Cal tenir en compte que Cerdà, com molts autors del moment, considerava les abscisses sobre l'eix de la paràbola i les semiordenades perpendiculars a aquestes.

En tot aquest capítol [15], Cerdà s'inspira en Muller. I encara que repeteix alguns temes ja vistos en capítols anteriors, el nivell d'algebrització és molt superior.

Sobre la construcció de l'el·lipse

En el «Cap [7]. De la naturaleza y propiedades de la elipse» del tractat de Cerdà, concretament en els corol·laris 1 i 2 de la proposició 3, Cerdà explica com dibuixar una el·lipse a partir de la propietat geomètrica d'aquesta cònica.

També, com per a la paràbola, Cerdà es guia del capítol «Caput VI De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicat» dels *Elementa Analyseos Mathematicae tam finitorum quam infinitorum* dins els *Elementa Matheseos Universae* de Wolff (vegeu les figs. 9, 10 i 11):

“Cap [7]. De la naturaleza y propiedades de la elipse” (Cerdà) ¹	“Caput VI De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicat” (Wolff) ²
Prop. 3. La suma de las Rectas FM, fM tiradas desde los Focos a un Punto cualquiera M del Perimetro de la Elipse es igual al Eje Mayor AB.	<i>Theorema.</i> Summa rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum æquatur axi majori AB.
Cor. 1. Dados los Ejes conjugados se podrá describir fácilmente una Elipse porque determinando por la Doctrina antecedente los Focos F y f puestos en ellos las extremidades de un hilo igual al Eje Mayor, si se mete dentro dicho hilo un clavo o punta M y se hace mover tirante a una y otra parte del Eje, semejante punta M describirá el Perimetro de la Elipse, pues siempre será $fM + FM = AB$.	COROLLARIUM I. 435. Datis ergo axibus conjugatis, Ellipsis facillime describitur. Determinatis enim focus F & f (§. 427), clavi in iis designantur & his filum circumligetur FMf axi majori AB æquale. Quodsi immisso stylo filum extendatur & circa clavos circumducatur, Ellipsis designabitur.

FIGURA 9 Sobre la construcció de l'el·lipse (Cerdà-Wolff).

FONT 1: Cerdà, 1760-1767: f. 40v-41.

FONT 2: Wolff, 1713-1715: § 434, 435.

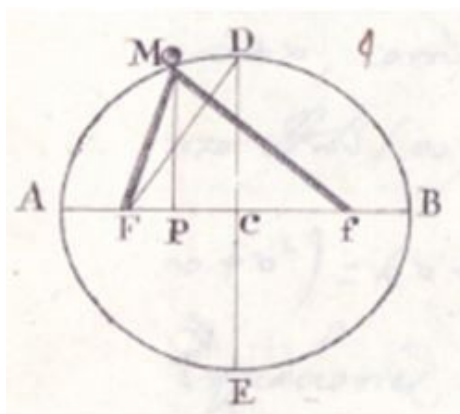


FIGURA 10. Construcció de l'el·lipse (1).
FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 37, «Lam. 2».

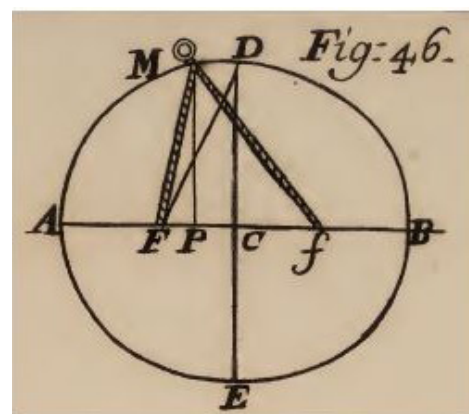


FIGURA 11. Construcció de l'el·lipse (2).
FONT: Wolff, 1713-1715: «Fig: Alg: Tab: IV».

Igualment, en la proposició 2 del capítol «Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas», seguint el text de Muller, tornem a trobar la forma de dibuixar una el·lipse (vegeu la fig. 12):

Prop. 2. Dado el Eje y los Focos, construir una sección Cónica

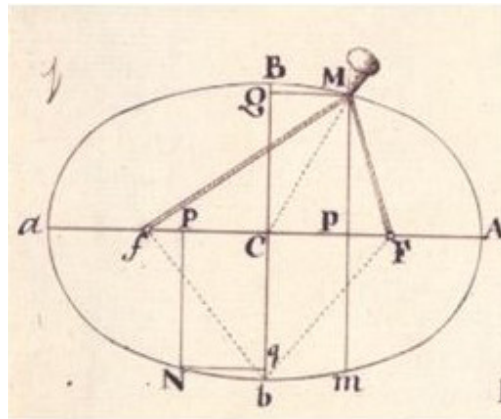


FIGURA 12. Construcció de l'el·lipse (3).

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 102, «Lam. 8».

Para la Elipse tomando un hilo fMF de igual longitud que el primer Eje y atando sus extremidades en los focos F, f la Punta M que tenga siempre tirante el hilo describirá moviéndose una Elipse que será siempre $Aa = fM + FM$ (Prop. 1).

(Cerdà, 1760-1767: f. 101v).

Si es vol recrear aquesta construcció amb el programa Geogebra es pot fer utilitzant el corol·lari 2 de la proposició 3 del capítol [7] (vegeu la fig. 13):

También con el compás se puede determinar cualquier Punto de la Elipse porque dividiendo el Eje AB en cualesquiera dos partes y tomándolas por Radios, puestos los Focos por Centros se podrán describir dos Arcos cuya intersección será un Punto de la Elipse por ser también $fM + FM = AB$.

(Cerdà, 1760-1767: f. 40v-41).

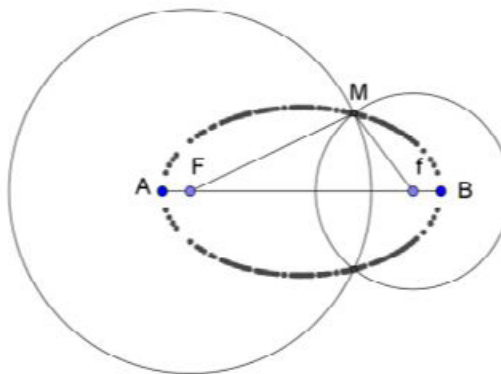


FIGURA 13. Construcció de l'el·lipse (4).

FONT: Figura de l'autor de l'article.

A continuació, en el mateix capítol [15], Cerdà afegeix una nova manera de construir l'el·lipse, també seguint el text de Muller (vegeu les figs. 14, 15 i 16):

“Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas” (Cerdà) ¹	“Section I. Of Conic-Sections consider'd in Plano” (Muller) ²
De otra suerte tómense dos Reglas AF y Bf iguales cada una al Primer Eje, teniendo siempre un extremo en los Focos F, f y los otros Extremos A y B que se comuniquen por otra Regla $AB = fF$, de suerte que estas Reglas libremente giren por los cuatro puntos A, B, F, f, la intersección M irá describiendo una Elipse. Porque siendo por la construcción $AB = fF$, $AF = Bf$, los triángulos AfF, fAB serán semejantes e iguales y los Ángulos $AfB = FAf$, por consiguiente $fM = MA$ y siempre en cualquier punto $FM + fM = FA$ que por la hipótesis es igual al Eje con que la curva será Elipse.	<i>Otherwise.</i> Let two Rulers AF, Bf, each of them equal in length to the first axis, have one of their ends fasten'd in the foci F, f, and the others A, B, to a third Ruler $AB = fF$, so that they may freely turn about the four points A, B, F, f; then the interseccion M will be always in the Curve. For becaufe $AB = fF$, $AF = Bf$, the triangles AfF, fAB will be similar and equal, also the angles AfB, FAf are equal; therefore $fM = MA$, and $FM + fM$ will always be $= FA$.

FIGURA 14. Sobre la construcció de l'el·lipse (Cerdà-Muller).

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 101v. FONT 2: Muller, 1736: 10.

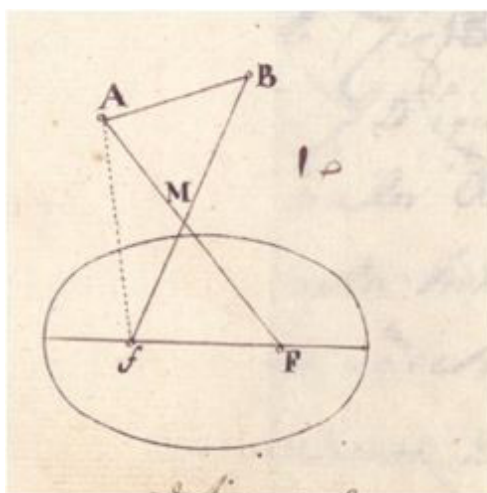


FIGURA 15. Construcció de l'el·lipse (5).

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 102, «Lam. 8».

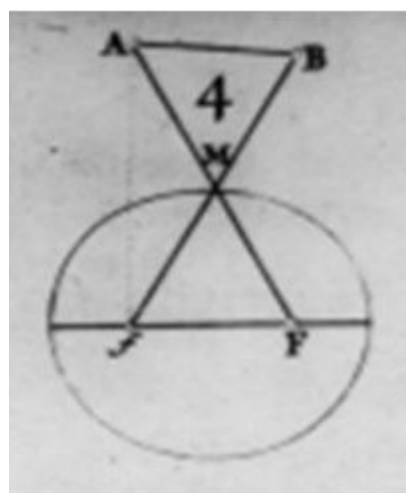


FIGURA 16. Construcció de l'el·lipse (6).

FONT: Muller, 1736: «Plate I, pag:19».

Hem fet una recreació, amb el programa Geogebra, de la figura que dibuixa Cerdà. El punt B gira al voltant del focus f a una distància $fB = d$ constant. El punt A s'ha de trobar a una distància fF de B (dins de la circumferència de centre B i radi fF) i a una distància d de l'altre focus F (dins de la circumferència de centre F i radi d). La intersecció entre aquestes dues circumferències ens dona el punt A . El punt M és la intersecció de FA amb fB (vegeu la fig. 17):

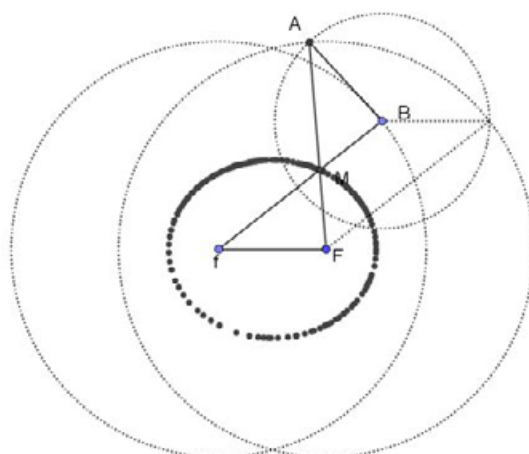


FIGURA 17. Construcció de l'el·lipse (7).

FONT: Figura de l'autor de l'article.

Sobre la construcció de la hipèrbola

En el «Cap [8]. De la naturaleza y propiedades de la hipèrbola» del tractat de Cerdà, concretament en el corol·lari 1 de la proposició 4, Cerdà explica com dibuixar una hipèrbola a partir de la propietat geomètrica d'aquesta cònica i amb l'ajut d'un instrument senzill. També, com per a l'el·lipse, Cerdà es guia del capítol «Caput VI De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicat» dels *Elementa Analyticeos Mathematicae tam finitorum quam infinitorum* dins els *Elementa Matheseos Universae* de Wolff (vegeu les figs. 18-23):

“Cap [8]. De la naturaleza y propiedades de la hipèrbola” (Cerdà) ¹	“Caput VI De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicat” (Wolff) ²
Prop. 4. Si en dos Hipérbolas iguales que tengan un mismo Parámetro, un mismo Eje Transverso y conjugado cuyos Ejes particulares AX y BY se juntan rectamente con el común Eje Transverso AB, se tiran desde los Focos F y f dos Rectas FM y fM a cualquier Punto M de una de ellas, la Diferencia de dichas Rectas es igual al Eje Transverso.	PROBLEMA CCI. 470. <i>Sint duæ Hyperbolæ æquales, eandem parametrum, eundem axem transversum atque conjugatum habentes, quarum axes AN & BY cum axe transverso communi AB in directum jacent. Tab. Ex focis F & f ad punctum M Hyperbolæ III. unius ducantur rectæ FM & fM: determinare quantitatem harum rectarum.</i>

FIGURA 18. Sobre la construcció de la hipèrbola (Cerdà-Wolff 1).

FONT 1: Cerdà, 1760-1767: f. 50v.

FONT 2: Wolff, 1713-1715: § 470, 471.

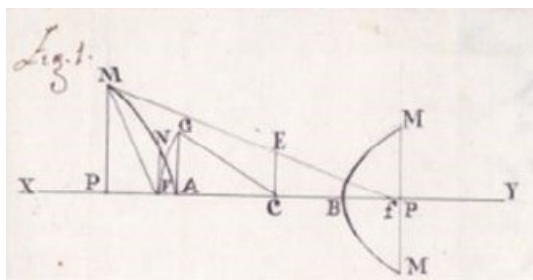


FIGURA 19. Construcció de la hipèrbola (1)
FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 56, «Lam. 4».

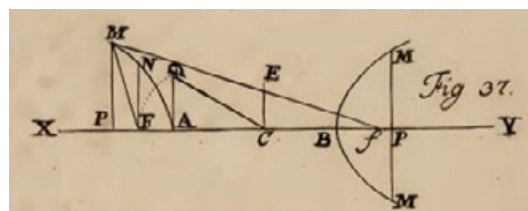


FIGURA 20. Construcció de la hipèrbola (2)
FONT: Wolff, 1713-1715: «Fig: Alg: Tab: III».

Cor. 1. Fundándose en esta propiedad de la Hipérbola se podrá dicha Curva describir con movimiento continuo, dado el Eje Transverso y la Distancia del Foco al Vértice y es poniendo en los Focos f y F unos clavos a uno de los cuales se ate un hilo FMC , cuyo otro extremo C esté atado al Punto C extremo de una Regla que sea mayor que dicho hilo de toda la cantidad del Eje Transverso AB y el otro extremo de la Regla sea móvil alrededor del Punto f con que poniendo una punta o lapiz en M , este irá describiendo la Hipérbola.

COROLLARIUM I.

471. Datis ergo axe transverso & distantia a vertice, Hyperbola motu continuo ita describitur. Scilicet in focis F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC , altero sui extremo C regulæ Cf alligatum, quæ ipsam superet axe transverso AB . Altera regulæ extremitas perforata clavo f injiciatur, & stilo ad filum applicato regula commovetur.

FIGURA 21. Sobre la construcció de la hipèrbola (Cerdà-Wolff 2).

FONT 1: Cerdà, 1760-1767: f. 50v.

FONT 2: Wolff, 1713-1715: § 470, 471.

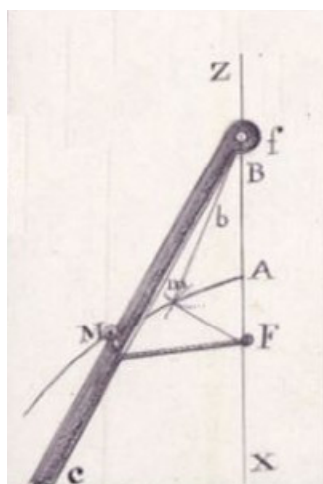


FIGURA 22. Construcció de la hipèrbola (3).
FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 56, «Lam. 4».

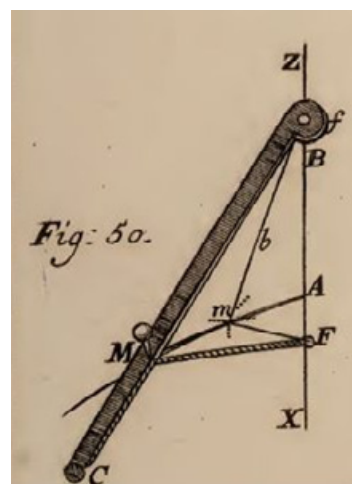


FIGURA 23. Construcció de la hipèrbola (4).
FONT: Wolff, 1713-1715: «Fig: Alg: Tab: IV».

Aquesta forma de construir la hipèrbola explicada en el corol·lari 1 de la proposició 4 del capítol «Cap [8]. De la naturalesa y propiedades de la hipèrbola» torna a aparèixer en la proposició 2 del

capítol «Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas», seguint el text de Muller (veure la fig. 24):

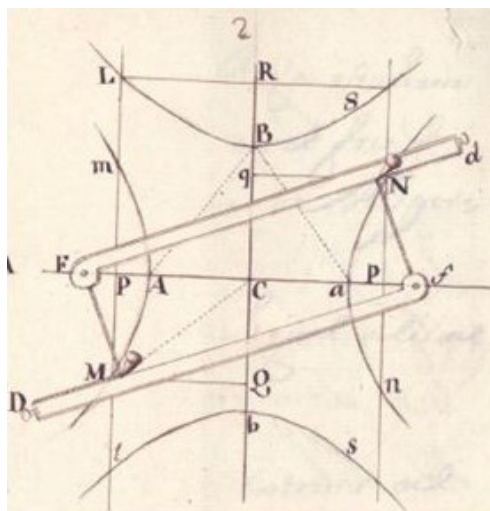


FIGURA 24. Construcció de la hipèrbola (5).

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 102, «Lam. 8».

Para la Hipérbola que uno de los Extremos de la Regla Df y del hilo FMD (cuya diferencia de entrambos es igual al primer Eje Aa) se aten en los Focos f, F y el otro extremo del hilo al Extremo D de la Regla. La Punta M que tenga siempre tirando el hilo describirá con su movimiento la Curva Hiperbólica MAm . (Cerdà, 1760-1767: f. 101v).

Aquesta construcció de la hipèrbola es pot recrear amb el programa Geogebra. Escollim una distància fM . Un cop escollida aquesta distància, la distància FM queda determinada ja que $FM + DM = l$ i per tant $FM = l - DM = l - (L - fM) = l - L + fM$. Que és equivalent a dir que $fM - FM = L - l$. El punt M serà aquell que es trobi a les distàncies fM i FM respectivament de f i de F i així successivament amb altres punts M , prenent diferents distàncies fM (vegeu fig. 25):

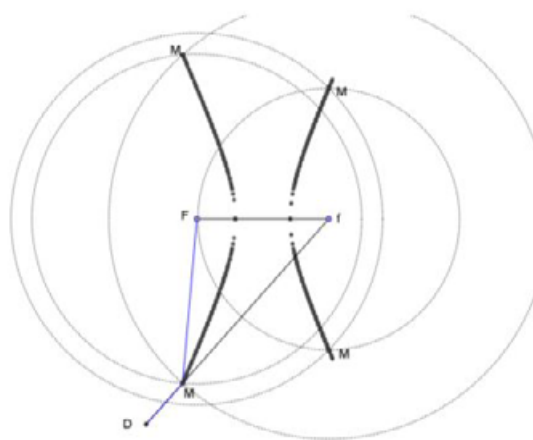


FIGURA 25. Construcció de la hipèrbola (6)

FONT: Figura de l'autor de l'article.

Finalment, la proposició 2 del capítol «Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas» acaba de la següent manera (veure les figs. 26, 27 i 28):

“Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas” (Cerdà) ¹	“Section I. Of Conic-Sections consider’d in Plano” (Muller) ²
En fin la Elipse y la Hipérbola se pueden describir de otra suerte. Tómese la línea fD igual al primer Eje y del Foco f como del centro con los Radios fN, fN describanse algunos arcos de círculos MNM que corten la línea fD en N y N. En tal caso si se toman las líneas FM, FM iguales a sus correspondientes DN, la curva que pase por los puntos M, M será la cónica que se busca. Porque $fM - fD \mp DN$ o $fM \pm FM (-fM \pm DN) - fD = \text{Eje de la Curva}$.	<i>Otherwise for the Ellipsis or Hyperbola.</i> Take the line fD equal to the first axis, and from the focus f as a Center with the radii fN, fN, describe a great number of circular arches MNM intersecting the line fD in N, N; then if the lines FM, FM are made always equal to their correspondent DN; the Curve-line, passing thro’ all the points M, M, will determine the Section required. For $fM = fD \mp DN$, or $(fM \pm DN) / fM \pm FM = fD = \text{to the first axis}$.

FIGURA 26. Sobre la construcció de la hipèrbola (Cerdà-Muller)

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 102. FONT 2: Muller: 1736, p. 10.

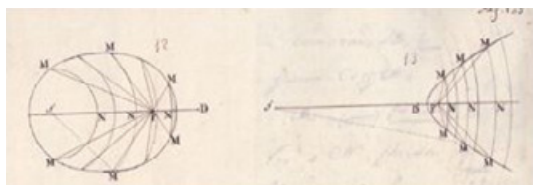


FIGURA 27. Construcció de la hipèrbola (7).

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 105, «Lam. 9».

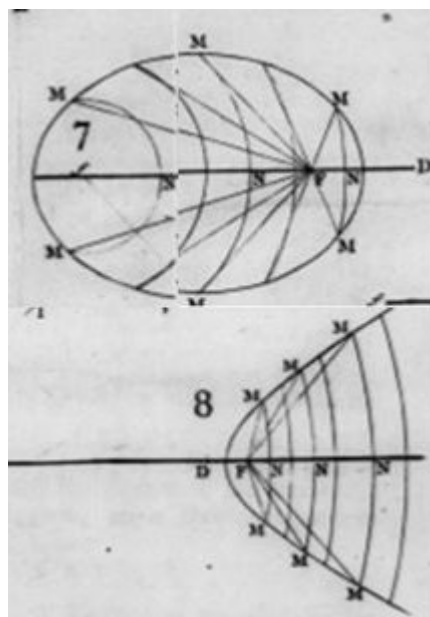


FIGURA 28. Construcció de la hipèrbola (8).

FONT: Muller, 1736: «Plate I, pag:19».

De fet, la construcció tant de l'el·lipse com de la hipèrbola que aquí ens proposa Cerdà és essencialment la mateixa que ja ens havia explicat, és a dir, des dels focus dibuixar circumferències que tenen els radis de forma que la seva suma (el·lipse) o la seva diferència (hipèrbola) sigui igual a una constant que serà l'eix de la cònica. L'originalitat de la proposta és que un mateix procediment o algorisme serveix per a les dues còniques. Quan el punt D (que determina l'eix fD) queda fora del segment fF tindrem una el·lipse, quan el punt D està entre f i F tindrem la hipèrbola. Efectivament, els radis respectius són $fM = fN$ i $FM = DN$ i quan D cau fora del segment fF tindrem $fM = fN = fD - DN$, per tant $fM + FM = fD - DN + DN = fD$. Mentre que si D està entre f i F tindrem $fM = fN = fD + DN$, per tant, $fM - FM = fD + DN - DN = fD$.

Com en les altres construccions, també es pot recrear aquesta amb el programa Geogebra. fD és l'eix de la cònica i en tots dos casos $fM = fN$ i $FM = DN$. En el primer cas $fM + FM = fD$ i en el segon $fM - FM = fD$ (vegeu les figs. 29 i 30):

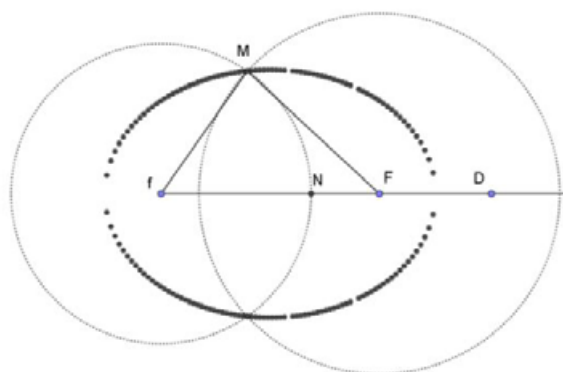


FIGURA 29. Construcció de l'el·lipse (8).

FONT: Figura de l'autor de l'article.

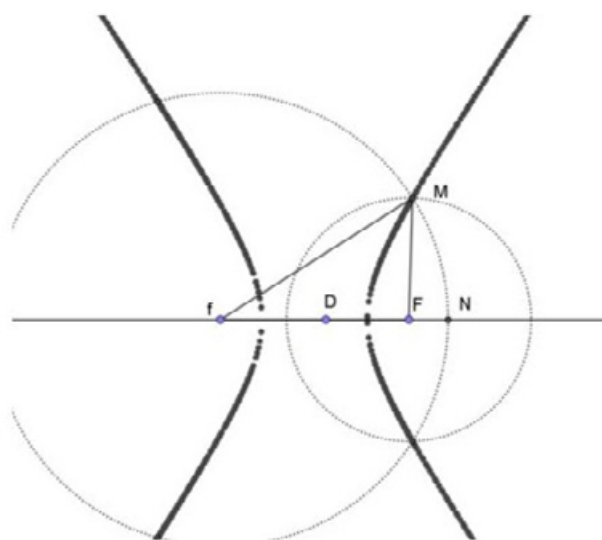


FIGURA 30. Construcció de la hipèrbola (9).

FONT: Figura de l'autor de l'article.

Algunes reflexions finals

Creiem que, en primer lloc, cal posar de relleu l'enorme interès que hi ha a l'Europa del segle XVIII en reproduir gràficament les construccions geomètriques de les còniques en els tractats matemàtics. Cerdà recull de dos matemàtics europeus, Wolff i Muller, aquest interès, i en molts altres tractats de l'època es pot trobar aquest mateix tipus de construcció. Cerdà no en té prou amb seguir a un sol matemàtic, busca els textos que pensa que seran més adequats per als seus alumnes, inclús quan, de vegades, sembla que repeteixi un exercici. El detall de les explicacions de les construccions donades

és una prova que aquestes van dirigides als alumnes o principiants. Efectivament, com sempre, l'objectiu de Cerdà és essencialment pedagògic.

Tot i que les construccions es basen en les propietats geomètriques de les còniques, l'explicació denota un alt nivell d'algebrització en les expressions utilitzades, especialment quan Cerdà segueix el text de Muller.

Per altra banda, es pot comprovar com moltes d'aquestes construccions s'han mantingut en l'ensenyament fins a l'actualitat, i això en demostra la força pedagògica. Tot això ens fa pensar que la recreació d'aquestes construccions a l'actual classe de matemàtiques pot permetre aprofundir en les propietats geomètriques de les còniques i, sobretot, aprofundir en l'estret lligam que hi ha entre una construcció geomètrica i la seva equivalència algebraica.

Referències bibliogràfiques

BERENGUER, Joaquim (2015). Tomàs Cerdà. *Tratado de Fluxiones* (1757-1759). Transcripció, notes i introducció editorial a cura de Joaquim Berenguer Clarià. Barcelona: Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona (RACAB).

BERENGUER, Joaquim (2016). *La recepció del càlcul diferencial a l'Espanya del segle XVIII. Tomàs Cerdà: introductor de la teoria de fluxions*, tesi doctoral en Història de la Ciència. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona. <<http://www.tdx.cat/handle/10803/367217>>.

BERENGUER, Joaquim (2023). «Les seccions còniques en el tractat *De la Aplicacion de la Algebra a la Geometria* de Cerdà». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria* [Barcelona], 21, p. 91-115. <<https://upcommons.upc.edu/handle/2117/398920>>.

CERDÀ, Tomàs (1760-1767). *De la Aplicacion de la Algebra a la Geometria*. Madrid: Real Academia de la Historia (RAH), Cortes 9/2793, f.1-f.145v.

MULLER, John (1736). *A Mathematical Treatise: Containing a System of Conic-Sections with the Doctrine of Fluxions and Fluents applied to various subjects*. London: Printed by T. Gardner, in Bartholomew-Close for the Author; and Sold by W. Innys and R. Manby, in St. Paul's Church-Yard, and J. Nourse without Temple-Bar. <https://archive.org/details/bim_eighteenth-century_a-mathematical-treatise_muller-john_1736/mode/2up>.

WOLFF, Christian (1713-1715). *Elementa Matheseos Universae* [Edició de 1743], Genevæ: Apud Henricum-Albertum Gosse, & Socios. <https://archive.org/details/b30413163_0001/mode/2up>.